



TITLE:

# 非粘性軸対称渦崩壊流れの安定解析 (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

京藤, 敏達

---

CITATION:

京藤, 敏達. 非粘性軸対称渦崩壊流れの安定解析 (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2019, 2128: 33-49

ISSUE DATE:

2019-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/252269>

RIGHT:

# 非粘性軸対称渦崩壊流れの安定解析

筑波大学システム情報系 京藤 敏達 (Harumichi KYOTOH\*)

\* Corresponding author: kyotoh@kz.tsukuba.ac.jp

2018 年 10 月 17 日

## 概 要

非粘性軸対称渦崩壊流れ (hollow core vortex) を例として、非平行流の線形安定解析について議論する。基本流は、上流で一様な軸流を持つランキン渦、下流では hollow core となる非粘性軸対称渦崩壊後の平行流であり、hollow core の発生点は淀み点となり分岐流線が現れ、hollow core 表面ではベルヌーイの定理から流速は 0 となる (仮に core 内に圧力勾配があれば 0 とはならない)。本研究では、基本流の近似的解析解を求めることにより、擾乱方程式の解を可能な限り解析的に扱う。特に、平行な円管内におけるこの分岐流線を持つ非粘性流れの線形安定解析を行う。

まず、上・下流の無限遠方における平行流の線形安定性を固有値問題により調べた。その結果、上流では中立安定、下流では不安定となることが判明した。下流のこの不安定性は移流型であると考えられ、非粘性流体の内部摩擦層近傍で生じる。また、固有値が集積すると考えられ、特異点を迂回するなどの解析を要し、擾乱方程式を単に数値シミュレーションする方法は使えない。次に、よどみ点を含む非平行流について、平行流と同様に内部摩擦層を定義できるかについて考察した。

## 1 序論

### 1.1 渦崩壊

Benjamin は渦崩壊は超臨界から亜臨界に至る流れであり、跳水と同様にエネルギー損失を伴うとした [4]。一方、Keller J. J. ら [23, 24] は、Bragg and Hawthorne 方程式 (B-H 方程式) に基づいた解析により、エネルギー損失の無い渦崩壊が可能であることを示し、渦崩壊後は dead water 領域が形成されるとして渦崩壊のモデル化を行った。

また、流下方向に一様なスワールジェットの移流・絶対不安定性に関する研究 [20] により、渦崩壊現象が絶対不安定性に依るとすると、その発生位置、発生周波数などが説明できることが示された。具体的には、軸方向平行流を持つランキン渦に対しては、解析的に固有値方程式が導かれ、軸方向流が後流型の場合に Kelvin-Helmholtz 固有値のヘリカルモードが絶対不安定となりこと [32]、および、Bachelor の q-vortex (外部流の無い後流) でもヘリカルモードが最も不安定となることが、数値解析により示された [10, 38]。また、軸対象モードの渦崩壊では、流れが超臨界か

ら亜臨界に遷移すること [4], ヘリカルモードの渦崩壊は絶対不安定性によって引き起こされ, その振動数は理論から予測される *centre mode* [27] の振動数に近い値となることが示された [39].

さらに, 上流端にスワールジェットが存在し, 下流に向かって移流する場合の 3 次元 N-S 方程式の数値解析により, レイノルズ数およびスワール数が大きいときに, ヘリカルモードもしくはダブルヘリカルモードの渦崩壊が現れること [16], また, 軸方向流れがジェット型のときは軸対称モード, 後流型のときはヘリカルモードが成長することが示された. したがって, 軸方向流が噴流型のスワールジェットでは, 先ず軸対称モードの渦崩壊が発生し, それによって後流型の軸方向流となり, 次いでヘリカルモードの渦崩壊に至ると推測される.

一方で, 非平行流 (二次元および三次元) の安定解析では, 固有値が固有関数に敏感に応答することが知られており [43, 16], 方程式から得られる解析的関係式により計算精度を検証することが結果の信頼性にとって重要であることが指摘されている [19, 34].

高レイノルズ数域の渦崩壊現象に関係して, 非粘性流体の安定解析が行われている. 非粘性流体の擾乱方程式は, 流体内部に特異点を持つことが知られており, 粘性流体との関係からその特異点近傍は内部摩擦層 (critical layer) と呼ばれている. 内部摩擦層近傍には離散不安定固有値が集積していること, また, 内部摩擦層の連続スペクトルは初期値問題に対して代数的増幅率を与えることが示されている [18].

## 1.2 研究目的及び方法

本研究で対象とする微細気泡発生ノズルは, 旋回流が強く流れの全域が亜臨界の場合にも渦崩壊が発生するように設計されており, Benjamin の渦崩壊の定義は当てはまらない [46, 47]. また, 本ノズルでは, ノズル出口の曲率をコアンダ効果が発現するように設計されており, いわゆる「コアンダ効果により誘起された渦崩壊」であり, 境界形状が渦崩壊を誘引する.

そこで, 流れの線形安定解析により, この軸対称渦崩壊の解の大域的な線形安定性を調べる. ところが, 大域的安定性問題では, 流入流出部の境界条件を厳密に与えることが難しいこと, 及び, 離散化による固有値が膨大な数だけ出現するため, 真の固有値を求めることが困難となる. 特に, 本研究対象では, 軸対称渦崩壊後の流れ場の安定性を調べる必要があり, これまでの研究とは異なり, 流れは漸変流ではなく急変流となるため, さらに安定解析は困難となる. そこで, 出来る限り精度良く計算を行うために, 最も単純な流れである「一様な円管内における軸対称渦崩壊流れ」を対象として安定解析を行う.

## 2 軸対称渦崩壊流れの基礎方程式

### 2.1 Hollow core vortex の漸近解

本研究の目的は, hollow core vortex の線形安定性を調べることであるが, 二次元流の場合には離散化による意味のない固有値が多数現れること, また開境界における境界条件の与え方など不

明な点が多い．そこで，基本流として一様管路の hollow core vortex を特徴付けるもっとも簡易な解を導き，その安定解析を可能な限り解析的に扱うことにする．したがって，ここでは軸流は断面内で一様であるとする．

本節では，流れの全域で平行流を持つ Rankine 渦の渦崩壊を対象とする．図 1 に座標系を示す．ここで， $r$  は円管中心から取った半径方向距離、 $r_c$  は渦核半径、 $z$  は流下方向距離、 $R$  は円管半径、 $y = r^2/2$ 、 $y = Y_a$  はキャビティ半径を表す．パラメータを整理するために、 $r, z$  を半径  $R$ 、 $\Psi$  を  $WR^2$  ( $W$  は軸方向流速) で無次元化し、改めて同じ記号  $r, z, \Psi$  を用いる．このとき、方位角方向の渦度方程式は、

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + k^2(\Psi - y) = 0, \quad k = 2S_{qf}, \quad y \equiv \frac{r^2}{2} \quad (1)$$

となる (Bragg and Hawthorne (1950)). ここで、 $S_{qf} = R\Omega/W$ 、 $\Omega$  はランキン渦の旋回周波数である．上式は  $k = 0$ , for  $r \geq r_c$  とおくと，渦なし流れの基礎方程式で与えられる．また，流速は循環の保存則および流れ関数の定義式

$$r v_\theta = C(\Psi), \quad v_r = -\frac{\partial \Psi}{r \partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \Psi}{r \partial r}. \quad (2)$$

より計算される．ここで， $u, v, w$  はそれぞれ  $z$  軸周り， $r$  方向， $z$  方向の流速， $C(\Psi)$  は循環で流線上で一定である．

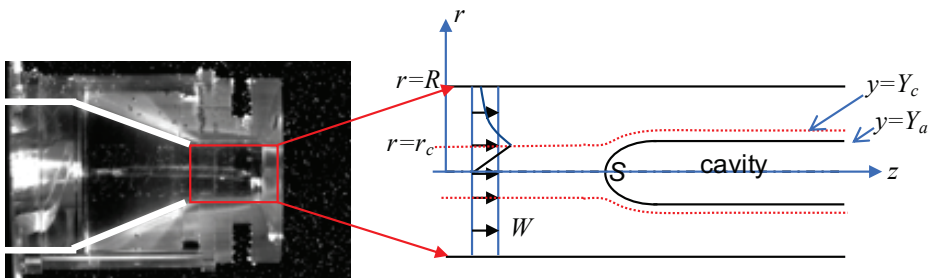


図 1: Coordinate system.

一様な管路における Rankine 渦の渦崩壊時の淀み点  $S$  周りの漸近解は [23, 24],

$$\Psi_{rot} = y\{y - Y_a(z)\}^2 f(y, z) \quad (3)$$

となる．ここで， $y = Y_a(z)$  は cavity 表面を表す．上式中  $y$  は渦崩壊前の  $z$  軸上の軸対称流れ， $(y - Y_a)^2$  は渦崩壊後の cavity 境界で流速が 0 となる条件を表す．また， $f(y, z)$  は  $y = Y_a$  で解析的な関数であり，基礎方程式 (1) から決定される．第一近似では、

$$f(z, y) \approx \frac{k^2}{2Y_a + (dY_a/dz)^2} \equiv B_0(z) \quad (4)$$

となる。

また、渦なし流れ領域では、壁面周りの級数展開に基づく長波近似によると、

$$\Psi_{irrot} \approx \frac{1}{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right) w_0(z) \quad (5)$$

となる。ここで、 $w_0(z)$  は壁面  $y = 1/2$  における  $z$  方向の流速である。

以上の未知関数  $Y_a(z)$ ,  $w_0(z)$  は、渦核と渦なし部の境界  $y = Y_c(z)$  における法線方向流速および圧力の連続条件

$$\begin{aligned} \Psi_{irrot}(z, Y_c) &= \Psi_{rot}(z, Y_c), & \frac{\partial \Psi_{irrot}}{\partial y}(z, Y_c) &= \frac{\partial \Psi_{rot}}{\partial y}(z, Y_c), \\ \Psi_{irrot}(z, Y_c) &= \Psi_c \end{aligned} \quad (6)$$

から決定される。上式は、未知関数  $Y_a(z)$ ,  $w_0(z)$ ,  $Y_c(z)$  に対する 3 本の微分方程式を与え、整理すると

$$w_0 = \frac{1 - 2\Psi_c}{1 - 2Y_c}, \quad (7)$$

$$Y_a = \frac{Y_c(3\Psi_c - Y_c - 4\Psi_c Y_c)}{\Psi_c - Y_c}, \quad (8)$$

$$Y_c' = \frac{(\Psi_c - Y_c)^2 Y_a'}{3\Psi_c^2 - 2\Psi_c(1 + 4\Psi_c)Y_c + (1 + 4\Psi_c)Y_c^2}. \quad (9)$$

となる。また、上式から  $Y_c$  のみの微分方程式を導くと、

$$\frac{dY_c}{dz} = \frac{(Y_c - \Psi_c)\sqrt{2Y_c\Lambda}}{(1 + 4\Psi_c)Y_c(Y_c - 2\Psi_c) + 3\Psi_c^2}, \quad (10)$$

$$\Lambda \equiv 4k^2\Psi_c Y_c^4 - 4k^2\Psi_c Y_c^3 + \{(k^2 - 4)\Psi_c - 1\}Y_c^2 + 4\Psi_c(1 + \Psi_c)Y_c - 3\Psi_c^2, \quad (11)$$

となる。ここで、 $z \rightarrow -\infty$  における解を求めるために、 $Y_c = \Psi_c + y_c$  ( $\Psi_c = r_c^2/2$ ) とおき、 $|y_c| \ll 1$  として、漸近解析を行うと

$$\frac{dy_c}{dz} \approx \frac{k}{\sqrt{2}} y_c, \quad Y_a \approx -\frac{2\Psi_c^2(1 - 2\Psi_c)}{y_c}, \quad w_0 \approx 1 + \frac{2}{1 - 2\Psi_c} y_c \quad (12)$$

が得られる。上式から、 $y_c \propto \exp(kz/\sqrt{2})$  であり、 $z \rightarrow -\infty$  のとき  $y_c \rightarrow 0$ ,  $Y_a \rightarrow -\infty$  となる。すなわち、式 (7), (8), (9) から求められる  $Y_a$  は、 $z < 0$  においても定義されており、 $z < 0$  では  $Y_a < 0$  となり、また、cavity 半径は  $R_a = \sqrt{2Y_a}$  より、cavity は  $z \geq 0$  のみに現れる。

さらに、 $z \rightarrow \infty$  のときの  $Y_c = Y_{c\infty}$  および  $Y_a = Y_{a\infty}$  は、 $O(\Psi_c) = \epsilon^4$ ,  $O(k) = \epsilon^{-2}$  とすると、 $\epsilon \ll 1$  のとき、

$$\begin{aligned} Y_{c\infty} &\approx \frac{k\sqrt{\Psi_c} - 1}{2k\sqrt{\Psi_c}} - \epsilon^4 \frac{\sqrt{\Psi_c}(k\sqrt{\Psi_c} + 1)}{k(k\sqrt{\Psi_c} - 1)}, \\ Y_{a\infty} &\approx \frac{k\sqrt{\Psi_c} - 1}{2k\sqrt{\Psi_c}} - \epsilon^4 \frac{\sqrt{\Psi_c}(k\sqrt{\Psi_c} - 3)}{k(k\sqrt{\Psi_c} - 1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

となる。上式から、 $k\sqrt{\Psi_c} \geq 1$  のときに cavity が存在することが分かる。

Fig.2 に  $kr_c = 1.5$  のときの式 (6) の数値解を示す。図中  $R_a$  は cavity の半径であり、 $R_a = \sqrt{2Y_a}$  で定義されている。一方で、 $Y_a$  は cavity の  $z$  の定義域で解析関数であり、上流側で負となっている。したがって、この解析モデルでは、従属変数として  $R_a$  ではなく  $Y_a$  を用いることが、淀み点の特異性を回避し解析的な解を得る上で重要であることがわかる。

以上の最低次の近似式の解は、渦核半径  $r_c$  とスワールパラメータに関するパラメータ  $k$  が独立に決定される。一方で、管径が一定の流れに対する運動量保存則に従えば、渦崩壊後に  $z$  に依存しない解に遷移する場合には、運動量  $-p + \rho v_z^2$  の断面積分値が保存されるため、 $r_c$  に依存して  $k$  が決定される (flow force が不変)。最低時の近似解が運動量保存則に適合しない理由は、基礎式 (1) が  $z$  の 2 階微分を含むが、最低次の近似式では 2 階微分を考慮しなかったためと考えられる。2 階微分を考慮した場合の B-K 方程式の近似解は、次式を境界条件 (6) に代入することで与えられる。

$$f(z, y) \approx \frac{k^2}{2Y_a + (dY_a/dz)^2} + \frac{k^2(y - Y_a)[ -12Y_a - 10(dY_a/dz)^2 + \{2Y_a - 3(dY_a/dz)^2\}d^2Y_a/dz^2]}{6\{2Y_a + (dY_a/dz)^2\}^3},$$

$$\Psi_{irrot} \approx \frac{1}{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right)w_0(z) + \frac{1}{6}\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 \frac{d^2w_0}{dz^2}. \quad (14)$$

$z \rightarrow \pm\infty$  で一様解が存在する条件から  $r_c$  と  $k$  の関係が導かれると考えられる。本研究では、軸対称渦崩壊の解の安定性を調べるために、できる限り簡易で基本流の特性を有する解を求めることを目的としているため、これ以上の議論は行わないこととする。

### 3 流れの安定性

主流として、前節で求めた簡単な近似解 (3) および (5) を用いて、安定解析を行う。

#### 3.1 支配方程式及び境界条件

定常流の安定性を調べるため、解を定常解と変動成分の線形和で表わす。

$$v_r = v_{r0} + \epsilon \hat{A}_r \exp(i\theta - i\omega t), \quad (15)$$

$$v_z = v_{z0} + \epsilon \hat{A}_z \exp(i\theta - i\omega t), \quad (16)$$

$$v_\theta = v_{\theta0} + \epsilon \hat{A}_\theta \exp(i\theta - i\omega t), \quad (17)$$

$$p = p_0 + \epsilon \hat{A}_p \exp(i\theta - i\omega t). \quad (18)$$

ここで、 $\epsilon$  は摂動パラメータ、 $m$  は周方向波数、 $\omega$  は角周波数である。主流は、式 (3) から、

$$v_{\theta0} = \frac{C_{ir}}{r}, \quad v_{r0} = -\frac{\partial \Psi_0}{r \partial z}, \quad v_{z0} = \frac{\partial \Psi_0}{r \partial r}, \quad C_{ir} = k \Psi_0 \quad (19)$$

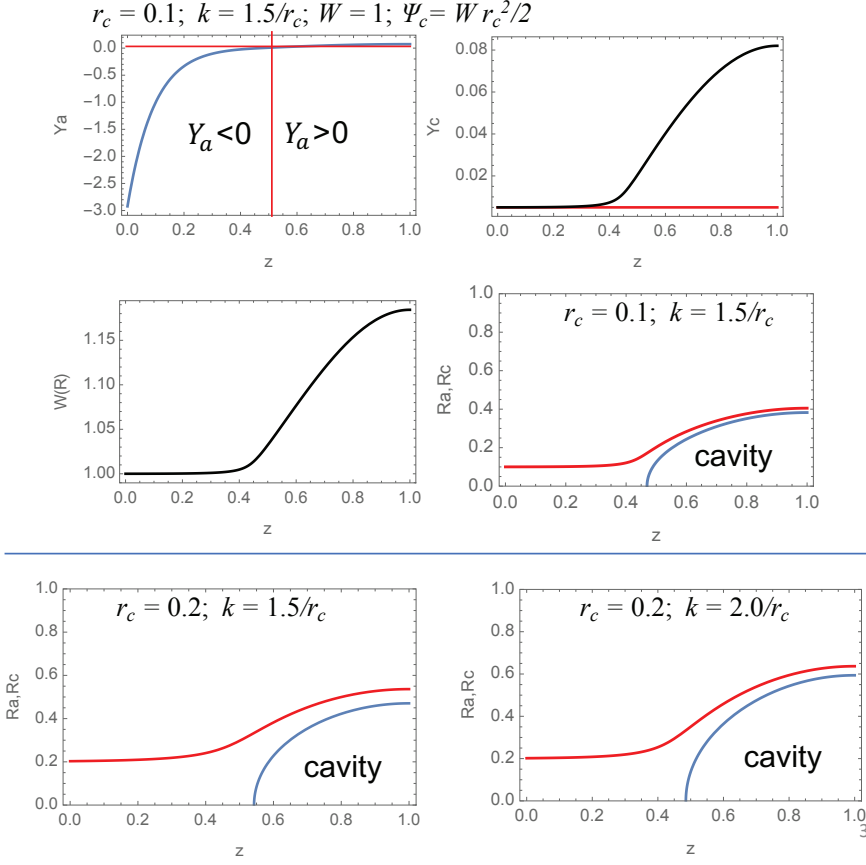


図 2: Solution of the simplified equations (6). 流れ関数による表記。

である。ここで、 $\Psi_0 = \Psi_{rot}$  および  $\Psi_{irrot}$  とおくことで、それぞれの領域における近似解が得られる。ただし、 $C_{ir} = k\Psi_0$  (渦核内),  $C_{ir} = k\Psi_c$  (渦核外) である。また、流れ関数を未知数として近似解を求めたため、 $\Psi_{irrot}$  から計算される方位角方向渦度は 0 とはならない。

流れ関数の定義 (19) にしたがって、流速を計算すると、渦核部では、

$$\begin{aligned}
 v_{\theta 0} &= \frac{k}{8} B_0(z) r (r^2 - 2Y_a(z))^2 \\
 v_{r0} &= \frac{1}{8} r (r^2 - 2Y_a(z)) \{ (r^2 - 2Y_a(z)) B_0'(z) - 4B_0(z) Y_a'(z) \} \\
 v_{z0} &= \frac{1}{4} B_0(z) (3r^4 - 8r^2 Y_a(z) + 4Y_a(z)^2)
 \end{aligned} \tag{20}$$

また、渦核外部では、

$$\begin{aligned} v_{\theta 0} &= \frac{k\Psi_c}{r} \\ v_{r0} &= \frac{1-r^2}{2r} w'_0(z) \\ v_{z0} &= w_0(z) \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ここで、先に述べたように、流れ関数から連続式を満たす流速場を求めているが、流れ関数がラプラス方程式の近似解であるため、上記の解は渦なし流れとはならない。主流解としては、質量保存則を満たすことを優先させた。ただし、擾乱は渦核外部で渦無し流れを仮定する。

式 (15)–(18) をオイラーの運動方程式に代入し  $\epsilon$  の 1 次 の 項 を 取 り 出 す こ と で、 変 動 成 分 の 支 配 方 程 式 が 得 ら れ る。 変 動 成 分 に 対 す る 連 続 式 お よ び オ イ ラー の 運 動 方 程 式 を、 それ ぞ れ 第 1 行 お よ び 第 2 行 以 下 に 配 置 し、 行 列 表 記 す る と

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r} + \mathbf{M}_z \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + \mathbf{M} \mathbf{q} &= \mathbf{0}. \\ \mathbf{q} &\equiv {}^t(\hat{A}_p, \hat{A}_r, \hat{A}_z, \hat{A}_\theta) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、未知関数  $\mathbf{q}$  は、 $r$ - $z$  座標系における摂動流速の振幅、 ${}^t$  は行列の転置を意味する。

### 3.2 界面の境界条件

界面  $y = Y_c$  における運動学的条件および圧力の連続条件は、

$$\frac{d}{dt}(y - Y_c) = 0, \quad p_{rot} = p_{irrot}, \quad \text{at } y = Y_c \quad (23)$$

である。ここで、 $d/dt$  は流跡線上の時間変化率

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (24)$$

で定義される。界面の擾乱を  $Y_{cf}$  とおき、 $Y_c = Y_c + Y_{cf}$ 、 $Y_c = R_c^2/2$  とすると、微小擾乱に対する方程式は  $y = Y_c$  で、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{cf}}{\partial t} + v_{z,irrot} \frac{\partial Y_{cf}}{\partial z} + \frac{v_{\theta,irrot}}{R_c} \frac{\partial Y_{cf}}{\partial \theta} &= R_c v_{rf,irrot} + R_{cf} v_{r,irrot}, \\ \frac{\partial Y_{cf}}{\partial t} + v_{z,rot} \frac{\partial Y_{cf}}{\partial z} + \frac{v_{\theta,rot}}{R_c} \frac{\partial Y_{cf}}{\partial \theta} &= R_c v_{rf,rot} + R_{cf} v_{r,rot}, \\ \frac{\partial p_{0,irrot}}{\partial r} R_{cf} + p_{f,irrot} &= \frac{\partial p_{0,rot}}{\partial r} R_{cf} + p_{f,rot} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ただし、 $Y_{cf} = R_c R_{cf}$  である。上第 3 式において、本研究では界面では主流は連続しており圧力勾配は等しく、結果的に圧力擾乱が連続となる。

cavity 表面の境界条件は、cavity 内で圧力が一定であるとする、

$$\frac{\partial Y_{af}}{\partial t} = R_a v_{rf,rot}, \quad p_{f,rot} = 0 \quad \text{at } r = R_a \quad (26)$$

が成立する。ここで、主流の cavity 表面の流速が 0 であることを用いた。



### 3.3 平行流領域の流れの安定性

#### 3.3.1 基本流の単純化

渦崩壊部を通過する流の安定性を議論する前に、渦崩壊前後の平行流領域における安定性を調べる。ここでの擾乱は、 $\exp(im\theta + i\alpha z - i\omega t)$  に比例する。

まず、 $z \rightarrow -\infty$  における主流解は、 $w_0(z) = 1$ ,  $Y_c \rightarrow \Psi_c + A \exp(kz/\sqrt{2})$  より、

$$\begin{aligned} v_{\theta 0, irrot} &= \frac{k\Psi_c}{r}, & v_{r 0, irrot} &= 0, & v_{z 0, irrot} &= 1, \\ v_{\theta 0, rot} &= \frac{kr}{2}, & v_{r 0, rot} &= 0, & v_{z 0, rot} &= 1. \end{aligned} \quad (27)$$

となる。この平行流を持つランキン渦は線形安定であることが示されている。次に、 $z \rightarrow \infty$  では、 $Y_a = \text{const.}$ ,  $Y_c = \text{const.}$  であり、式 (11) で  $\Lambda = 0$  とすると  $Y_c$  が得られ、これを式 (7), (8) に代入すれば、 $Y_a$ ,  $w_0$  が決定される。このとき、流速分布は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} v_{\theta 0, irrot} &= \frac{k\Psi_c}{r}, & v_{r 0, irrot} &= 0, & v_{z 0, irrot} &= \frac{1 - 2\Psi_c}{1 - 2Y_c}, \\ v_{\theta 0, rot} &= \frac{k^3 r (r^2 - 2Y_a)^2}{32Y_a}, & v_{r 0, rot} &= 0, & v_{z 0, rot} &= \frac{k^2 (3r^2 - 2Y_a)(r^2 - 2Y_a)}{16Y_a}. \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、 $Y_a$ ,  $Y_c$ ,  $w_0$  が式 (7), (8) および  $\Lambda = 0$  を満たすとき、界面  $r = R_c$  において上記の流速は連続、また、 $r = R_a$  で流速が 0 となる。図 3 に渦崩壊前後の流速分布を示す。

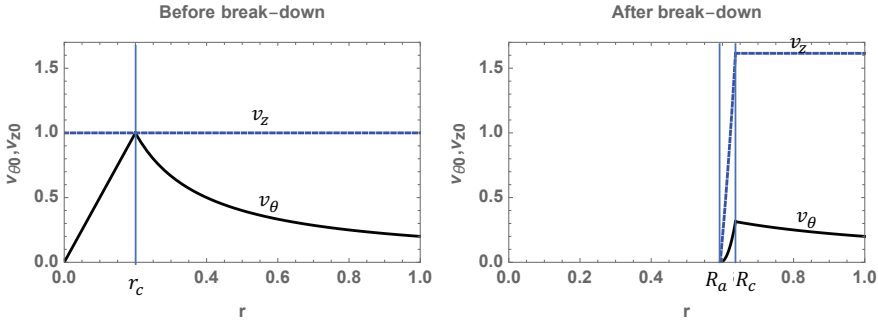


図 3: 渦崩壊前後の平行流域における流速分布 ( $r_c = 0.2$ ,  $kr_c = 2$ )。

次に、渦核半径  $r_c$  が小さく ( $r_c \ll 1$ : 集中渦の渦崩壊)、以下のスケーリング則を満たす基本流の解を求める。

$$O(r_c) = \epsilon^2, \quad O(k) = \epsilon^{-2}, \quad O(R_a) = \epsilon, \quad O(R_c - R_a) = \epsilon^3. \quad (29)$$

このとき、渦崩壊後の解  $R_a$ ,  $R_c$  は、

$$k = 2^{1/2} r_c^{-1}, \quad R_a = 2^{1/4} r_c^{1/2}, \quad R_c = 2^{1/4} r_c^{1/2} (1 + 2^{-1/2} r_c), \quad (30)$$

で与えられる。渦なし領域における主流は、渦崩壊前後において界面位置が変位するのみで同一の解で与えられる。

$$v_{z,irrot} = 1, \quad v_{r,irrot} = 0, \quad v_{\theta,irrot} = \frac{r_c}{2^{1/2}r}. \quad (31)$$

また、式 (27) および (28) を近似すると、

$$v_{z,rot} = 1, \quad v_{r,rot} = 0, \quad v_{\theta,rot} = \frac{r}{2^{1/2}r_c}, \quad \text{for } x \rightarrow -\infty. \quad (32)$$

$$v_{z,rot} = n, \quad v_{r,rot} = 0, \quad v_{\theta,rot} = \frac{r_c}{2^{1/2}R_c}n^2, \quad v_{z,rot} = n \quad \text{for } x \rightarrow \infty, \quad (33)$$

ただし、 $n$  は  $r = R_a + (R_c - R_a)n$  で定義され、 $v_{\theta,rot}$  は、近似の精度内で界面で  $v_{\theta,irrot}$  と連続するように  $n^2$  の係数を決定した。また、この近似の範囲内では cavity の発生による流速増加は無視され、近似前の解 (28) が有する  $r$  に関する対称性 ( $v_{\theta 0}$  は奇関数、 $v_{z 0}$  は偶関数であること) は消失している。

### 3.3.2 擾乱方程式の解

渦崩壊前の平行流は、一様な軸流を持つランキン渦であり、中立安定であることが知られている。まず、渦核領域における解は、

$$r^2 A_{p,rot}'' + r A_{p,rot}' + \left\{ \left( \frac{k\alpha}{\Omega} \right)^2 r^2 - m^2 \right\} A_{p,rot} = 0, \quad \Omega \equiv \omega - \alpha - \frac{k}{2}m, \quad (34)$$

$$A_{r,rot} = i \frac{-km A_{p,rot} + \Omega r A_{p,rot}'}{(k^2 - \Omega^2)r}, \quad A_{\theta,rot} = \frac{-m\Omega A_{p,rot} + kr A_{p,rot}'}{(k^2 - \Omega^2)r},$$

$$A_{z,rot} = \frac{\Omega(m^2 A_{p,rot} - r A_{p,rot}' - r^2 A_{p,rot}'')}{\alpha(k^2 - \Omega^2)r^2}, \quad (35)$$

となる。式 (34) の解は、 $r = 0$  で特異点を持たないという制約条件により、以下のとおりベッセル関数で与えられる。

$$A_{p,rot} = C_{rot} J_m(\beta r), \quad \beta^2 = \frac{\alpha^2(k^2 - \Omega^2)}{\Omega^2}. \quad (36)$$

ここで、 $C_{rot}$  は積分定数である。次に、ポテンシャル流領域における解は、

$$r^2 \Phi'' + r \Phi' + (m^2 + \alpha^2 r^2) \Phi = 0, \quad (37)$$

$$A_{p,irrot} = i \rho \left( \Omega + \frac{mk}{2} - \frac{mk\Psi_c}{r^2} \right) \Phi, \quad (38)$$

$$A_{r,irrot} = \Phi', \quad A_{\theta,irrot} = \frac{im}{r} \Phi, \quad A_{z,irrot} = i\alpha \Phi, \quad (39)$$

となる。ここでは渦核半径が非常に小さい場合を扱っているため ( $r_c \ll R_c \ll 1$ )、式 (37) の基本解としてはケルビン関数  $K_m(\alpha r)$  のみで解を構成し、

$$\Phi = C_{irrot} K_m(\alpha r), \quad (40)$$

とおき、波数として  $K_m(\alpha) \ll 1$  を満たすものを対象とする。また、界面条件は、

$$A_{r,irrot}(r_c) = A_{r,rot}(r_c), \quad A_{p,irrot}(r_c) = A_{p,rot}(r_c), \quad i\Omega Y_{cf} + r_c A_r(r_c) = 0. \quad (41)$$

となる。上第一式は界面で主流流速が連続であることから導かれ、第二式は圧力の連続条件である。以上の結果から渦崩壊前の平行流における擾乱の分散関係式が得られ、詳細に解析されている。

次に、渦崩壊後の平行流の分散関係式について説明する。まず、ポテンシャル流域では、主流が渦崩壊前と同一であるため、擾乱方程式の解は式 (37)–(39) で与えられる。一方で、渦核部の擾乱方程式は次のようにして解くことができる。(I) 連続式及び  $z, \theta$  方向の運動方程式を代数的に解き  $A_{z,rot}, A_{\theta,rot}, A_{p,rot}$  を  $A_{r,rot}$  で表す。(II) この結果を  $r$  方向の運動方程式に代入すると、 $A_{r,rot}$  に対する 2 階の常微分方程式が得られる。

$$mr^3\zeta\Omega^2 A_{r,rot}'' + mr\Omega\{-2m\zeta v_{\theta,rot} + r\zeta(\eta + 2\Omega + r\Omega') - r^2\zeta'\Omega\} A_{r,rot}' + [2\zeta v_{\theta,rot}\{\alpha^2 r^2 \eta - \zeta(\Omega + \alpha r v_{z,rot}')\} + mr\Omega\{-\zeta^2\Omega - r\eta\zeta' + \beta(\eta + r\eta')\}] A_{r,rot} = 0 \quad (42)$$

ここで、

$$A_{z,rot} = i \frac{(\alpha r \eta - \zeta v_{z,rot}') A_{r,rot} + \alpha r^2 \Omega A_{r,rot}'}{\zeta \Omega}, \quad (43)$$

$$A_{\theta,rot} = i \frac{(-\alpha^2 r^2 \eta + \zeta(\Omega + \alpha r v_{z,rot}') A_{r,rot} + m^2 r \Omega A_{r,rot}')}{m \zeta \Omega}, \quad (44)$$

$$A_{p,rot} = i \frac{r \eta A_{r,rot} + r^2 \Omega A_{r,rot}'}{\zeta}, \quad (45)$$

ただし、

$$\Omega(r) \equiv \omega - \alpha v_{z,rot} - m \frac{v_{\theta,rot}}{r}, \quad \eta(r) \equiv \omega - \alpha v_{z,rot} + \alpha r v_{z,rot}' + m v_{\theta,rot}', \quad (46)$$

$$\zeta(r) \equiv m^2 + \alpha^2 r^2 \quad (47)$$

である。式 (42) は、 $\Omega(r) = 0, r = r_{cr}$  のとき  $A_{r,rot}$  の最高階微係数の係数は 0 となり特異性を持つ。この特異性の程度を調べるために、 $A_{r,rot} \propto (r - r_{cr})^\sigma, \Omega = (r - r_{cr})\Omega_1(r)$  とおき、式 (42) に代入すると、 $\sigma$  の決定方程式は

$$mr^2\zeta\Omega_1^2\sigma(\sigma-1) + m\Omega_1\{-2m\zeta v_{\theta,rot} + r\zeta(\eta + r\Omega_1)\}\sigma + 2\alpha\zeta v_{\theta,rot}(\alpha r \eta - \zeta v_{z,rot}') = 0, \quad \text{at } r = r_{cr} \quad (48)$$

となる [18]。上式は  $\sigma$  の二次方程式であり 2 つの独立解が得られ、その線形和が一般解となる。したがって、この特異点は正則である。ここで、 $r = R_a + n(R_c - R_a), 0 \leq n \leq 1$ , とおき、 $r$  から  $n$  に変数変換すると  $n = n_{cr}$  は  $\Omega(r_{cr}) = 0$  より

$$n_{cr}\alpha - \omega = \frac{-\sqrt{2}m n_{cr}^2 r_c \pm 2n_{cr} r_c \sqrt{n_{cr}\{3n_{cr}(R_c - R_a) + 2R_a\}/(R_c - R_a)}}{2R_c\{n_{cr}(R_c - R_a) + R_a\}}. \quad (49)$$

となる。上式から、すべての  $0 \leq n_{cr} \leq 1$  に対してこのような  $\alpha, \omega$  が必ず存在することがわかる。分散関係式の解が上記の方程式の解として実数  $n$  を与える場合には、内部摩擦層（critical layer）を考慮し粘性流体を想定した解析が必要となる。

ここでは、不安定モード ( $\Im(\omega) > 0$ ) を対象とし、このような特異性が現れない場合に渦核部の解を  $n$  の冪級数で与え、cavity 表面の圧力一定条件および界面における法線方向流速および圧力の連続条件から分散関係式を求め、近似的に  $\Im(\omega) \rightarrow 0$  の極限として内部摩擦層の位置を推定した。図 4 は、 $m = 1$  のとき、角振動数  $\omega$  が最初に複素数（共役複素数）になるときの  $\alpha = \alpha_{cr}$  および波速  $c_{cr} = \omega_{cr}/\alpha_{cr}$  を示す。この臨界値において、式 (49) を満たす  $n = n_{cr}$  を計算すると  $r_c = 0.001, 0.01, 0.1$  においてそれぞれ  $n_{cr} = 0.54, 0.78, 0.91$  となる。以上の結果は渦核における冪級数を 5 次まで考慮したものであるが、4 次の結果とほとんど変わらないため、特に不安定モードの解析においては渦核部の級数解は収束していると見做すことができる。内部摩擦層  $r = r_{cr}$  における擾乱が最も不安定となると仮定すると、分散関係式は  $\Omega = 0$ 、すなわち

$$\omega = v_{z,rot}(r_{cr})\alpha + m \frac{v_{\theta,rot}(r_{cr})}{r_{cr}} \quad (50)$$

で与えられ、内部摩擦層の位置から近似的な分散関係式が決定される。本研究で対象とする渦崩壊ではスパイラル状の渦核がほぼ流れと共に移流しながら旋回しており、内部摩擦層の位置により渦核の歳差運動周波数が推定される。

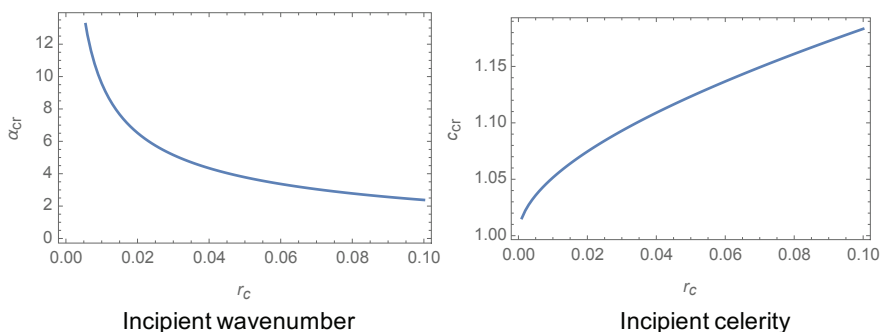


図 4: 渦崩壊後の平行流域において  $m = 1$  モードが不安定となる波数の最小値  $\alpha_{cr}$  および波速  $c_{cr}$ 。

内部摩擦層における離散固有値・固有関数を解析的に決定するためには、特異点近傍の解を Frobenius 級数展開で与え、境界条件を満たす解を構成するか、もしくは、shooting 法により特異点を迂回する経路で積分することで結果を検証する必要がある [18]。また、この内部摩擦層を含む解を解析的に構成する方法としては、内部摩擦層が境界  $r = R_a$  もしくは  $r = R_c$  に漸近するパラメータ条件における漸近解を求め、固有値問題を構成することが挙げられる。非粘性流体では連続スペクトル近傍に、無限個の離散固有値（時間不安定モード）が集積することがあることが知られており、数値的に固有値を求めることは難しい。

また、この不安定性が移流型か絶対型かを調べる必要があるが、移流型であると考えられる。移流型の不安定性の場合には、初期値問題の解がある固定座標において  $t \rightarrow \infty$  で 0 に収束することになる。Briggs-Bers の方法にしたがうと、物理空間における解を求めることなく分散関係式から移流型か絶対型不安定であるかを判別することができる。

一方、連続固有値については、初期値問題の解を構成することで、その役割が明確にされ、不安定性への寄与については代数的増幅に留まることが知られている。

### 3.4 淀み点を含む領域の解

渦崩壊前の平行流は中立安定、渦崩壊後の平行流は移流型不安定である。したがって、よどみ点を含む渦崩壊部における擾乱挙動が安定性を左右することになる。

前節で述べたように、平行流であっても内部摩擦層を有する流れは、その基礎方程式が物理的ではない解を含むため、直接数値シミュレーションは困難である。したがって、解析解の中で物理的に意味のある要素を抜き出して研究を進める必要がある。

#### 3.4.1 淀み点を含む領域の解

平行流の場合には、擾乱方程式を 1 本の 2 階常微分方程式まで簡素化することができ、最高階微係数の係数が 0 となる定義域内の点が存在するため境界条件を満たすことができないとして内部摩擦層 (critical layer) が定義される。未知関数を消去し減らすのではなく、運動方程式から内部摩擦層がどのように生じるかを見るために、 $r$  に関する微係数で擾乱方程式を整理すると

$$\frac{\partial v_{rf}}{\partial r} = -\frac{v_{rf}}{r} - \frac{\partial v_{zf}}{\partial z} - \frac{\partial v_{\theta f}}{r \partial \theta}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} = -\rho \left( \frac{D v_{rf}}{Dt} - \frac{d v_{r0}}{dr} v_{rf} \right), \quad (52)$$

$$\frac{D}{Dt} v_{zf} = -\frac{d v_{z0}}{dr} v_{rf} - \frac{\partial p_f}{\rho \partial z}, \quad (53)$$

$$\frac{D}{Dt} v_{\theta f} = -\frac{d v_{\theta 0}}{dr} v_{rf} - \frac{\partial p_f}{\rho r \partial \theta}, \quad (54)$$

となる。ただし、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_{\theta 0}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (55)$$

である。式 (53), (54) から  $v_{zf}, v_{\theta f}$  を  $v_{rf}, p_f$  で表し、式 (51), (52) に代入すると、未知関数  $v_{rf}, p_f$  に関する一階の常微分方程式系を得る。式 (51), (52) は見かけ上、特異性を持たないが、式 (53), (54) から  $v_{zf}, v_{\theta f}$  を求める際に  $D/Dt$  の逆変換が存在する必要がある。ある  $r = r_{cr}$  で  $v_{zf}, v_{\theta f}$  が得られないことが Rayleigh 方程式の特異性に関与する。

一方で、平行流において現れるこの微分方程式の特異点があるが、そもそも非平行流では存在するのか、また内部摩擦層を含む形で拡張可能なのかについて以下で考察する。まず、軸対称定常流の

安定性について、定常流の流線 ( $\Psi_{rot} = s^2 = \text{const.}$ ) とそれに直交する座標系 ( $\Phi = \text{const.}$ ) における擾乱方程式を求めると [49]

$$\mathbf{M}_s \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} + \mathbf{M}_\Phi \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Phi} + \mathbf{M} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} \equiv {}^t(A_p, A_s, A_\Phi, A_\theta) \quad (56)$$

となる。ここで、未知関数  $\mathbf{q}$  は、 $s$ - $\Phi$  座標系における摂動流速の振幅（擾乱は  $\exp i(m\theta - \omega t)$  に比例すると仮定）、 $'$  は行列の転置を意味する。また、式 (56) の係数行列は次式で与えられる。

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{h_s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho h_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{h_\Phi} & 0 \\ 0 & \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho h_\Phi} & 0 & \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi} \end{bmatrix} \quad (57)$$

また、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{h_\Phi h_\theta}{h_s h_\Phi h_\theta} \right) & \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \frac{h_\theta h_s}{h_s h_\Phi h_\theta} \right) & i \frac{m}{h_\theta} \\ 0 & i \frac{m \tilde{u}_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\partial h_s}{\partial \Phi} \frac{u_{\Phi 0}}{h_s h_\Phi} & - \frac{2}{h_s h_\Phi} \frac{\partial h_s}{\partial s} u_{\Phi 0} & - \frac{2}{h_s h_\theta} \frac{\partial h_\theta}{\partial s} u_{\theta 0} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{h_\Phi u_{\Phi 0}}{h_s h_\Phi} \right) & i \frac{m \tilde{u}_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\partial u_{\Phi 0}}{\partial \Phi} & - \frac{2}{h_\Phi h_\theta} \frac{\partial h_\theta}{\partial s} u_{\theta 0} \\ i \frac{m}{\rho h_\theta} & \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{h_\theta u_{\theta 0}}{h_s h_\theta} \right) & \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \frac{h_\theta u_{\theta 0}}{h_\Phi h_\theta} \right) & i \frac{m \tilde{u}_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\partial h_\theta}{\partial \Phi} \frac{u_{\Phi 0}}{h_\Phi h_\theta} \end{bmatrix} \quad (58)$$

となる。ここで、変数変換のスケール・ファクター  $h$  は、

$$h_s = \left| \left( \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right|, \quad h_\Phi = \left| \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi}, \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right) \right|, \quad h_\theta = r, \\ \vec{e}_s = \frac{\left( \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right)}{h_s}, \quad \vec{e}_\Phi = \frac{\left( \frac{\partial r}{\partial \Phi}, \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right)}{h_\Phi}, \quad (59)$$

で与えられ、定常流の解 (3), (4) から計算される。ただし、

$$\tilde{u}_{\theta 0} = u_{\theta 0} - \frac{h_\theta \omega}{m} \quad (60)$$

および、座標変換のパラメータ  $\Phi$  に関する関数形は  $\vec{e}_s$  と  $\vec{e}_\Phi$  が直交するように選ばれる必要がある。境界条件は  $s = s_1, s_2$  で課されるため、式 (56) の第一、第二行目は  $A_p, A_s$  の決定方程式となる。また、第三、第四行目は  $A_\Phi, A_\theta$  を  $A_p, A_s$  の関数として決定するための方程式であり、次式で与えられる。

$$u_{\Phi 0} \frac{\partial A_\Phi}{h_\Phi \partial \Phi} + \left( i m \frac{\tilde{u}_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\partial u_{\Phi 0}}{h_\Phi \partial \Phi} \right) A_\Phi + 2 \frac{\partial h_\theta}{h_\Phi \partial \Phi} \frac{u_{\theta 0}}{h_\theta} A_\theta = F_3 \quad (61)$$

$$u_{\Phi 0} \frac{\partial A_\theta}{h_\Phi \partial \Phi} + \left( i m \frac{\tilde{u}_{\theta 0}}{h_\theta} + \frac{\partial u_{\Phi 0}}{h_\Phi \partial \Phi} \right) A_\theta = F_4 \quad (62)$$

ここで、 $F_3, F_4$  は  $A_p, A_s$  の線形項を表す。また、定常流の循環の保存則  $\partial(h_\theta u_{\theta 0})/\partial \Phi = 0$  を用いた。上第二式が可解のとき第一式も可解となるため、内部摩擦層は、第二式から  $A_\theta$  が一意に決定されない  $s = s_{cr}$  として定義される。

## 4 まとめ

本研究では、淀み点を持つ非粘性軸対称渦崩壊流れの線形安定性を議論した。主流が非平行流であること、および、内部摩擦層が現れることが、擾乱方程式の数値解析を困難にしている。そこで、まず、主流について、一様な円筒管内の軸対称渦崩壊を表す漸近解を解析的に求めた。次に、実験で観察されるヘリカルモードが主流の移流速度で旋回することから、擾乱方程式の内部摩擦層近傍の固有値に着目した解析を行った。今後、擾乱方程式の特異点と非平行流の内部摩擦層の関係、および、特異点周りの漸近解析を行うことで固有値の特性を調べる予定である。

## 参考文献

- [1] Alekseenko, Kuibin, Okulov & Shtork, Helical vortices in swirl flow, J. Fluid Mech., v. 382, pp. 195-243, 1999.
- [2] Alekseenko, S. V., Kuibin, P. A., Okulov, V. L. & Shtork, S. I.: Vortex Precession in a Gas-Liquid Flow, Heat Transfer Research, 41 (4) (2010) 465- 477.
- [3] Batchelor, G. K.: Axial flow in trailing line vortices, J. Fluid Mech., 20(1964) 645-658.
- [4] Benjamin, T. B., Theory of the vortex breakdown phenomenon, J. Fluid Mech., vol. 14, pp. 593-629, 1962.
- [5] Bers, A.: Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective. In Handbook of Plasma Physics (ed. Rosenbluth, M. & Sagdeev, R.), (1983) 451-517. North-Holland.
- [6] Buntine, J. D. & Saffman, P. G.: Inviscid swirling flows and vortex breakdown, Proc. R. Soc. Lond. A, 449 (1995) 139-153.
- [7] Casanova, J. O. & Fera, R. F.: Three-dimensional transitions in a swirling jet impinging against a solid wall at moderate Reynolds numbers, Physics of Fluids 21, 034107 (2009).
- [8] Cassidy, J. J. & Falvey, H. T.: Observations of unsteady flow arising after vortex breakdown, J. Fluid Mech., 41 (1970) 727-736.
- [9] Chanaud, R. C.: Observations of oscillatory motion in certain swirling flows, J. Fluid Mech., 21 (1) (1965)
- [10] Delbende, I., Chomaz, J. M. & Huerre, P.: Absolute/ convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response, J. Fluid Mech., 355 (1998) 229-254.

- [11] Dizes, S. L., Monkewitz, P. A. & Huerre, P.: Viscous structure of plane waves in spatially developing shear flows, *Phys. Fluids*, 7 (6) (1995) 1337-1347.
- [12] Escudier, M. P., Bornstein, J. & Maxworthy, T.: The dynamics of confined vortices, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 382 (1982) 335-360.
- [13] Escudier, M.: Vortex breakdown: Observations and Explanations, *Prog. Aerospace Sci.*, 25 (1988) 189-229.
- [14] Fabre, D. & Jacquin, L.: Viscous instabilities in trailing vortices at large swirl numbers, *J. Fluid Mech.*, 500 (2004) 239-262.
- [15] Fernandes, E. C., Heitor, M. V. & Shtork, S. I.: An analysis of unsteady highly turbulent swirling flow in a model vortex combustor, *Experiments in Fluids*, 40 (2006) 177-187.
- [16] Gallaire, F., Ruith, M., Meiburg, E., Chomaz, J. M. & Huerre, P.: Spiral vortex breakdown as a global mode, *J. Fluid Mech.*, 549 (2006) 71-80.
- [17] Hall, M. G.: Vortex breakdown, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 4 (1972) 195-218.
- [18] Heaton, C. J. & Peake, N.: Algebraic and exponential instability of inviscid swirling flow, *J. Fluid Mech.*, 565 (2006) 279-318.
- [19] Hill, D. C.: Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers, *J. Fluid Mech.*, 292 (1995) 183-204.
- [20] Huerre, P. and Monkewitz, P. A.: Local and global instabilities in spatially developing flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22(1990) 473-537.
- [21] Kogawa, H., Naoe, T., Kyotoh, H., Haga, K., Kinoshita, H. & Futakawa, M.: Development of microbubble generator for suppression of pressure waves in mercury target of spallation source, *Journal of Nuclear Science and Technology*, 52(12) (2015) 1461-1469.
- [22] Keller, J. J. & Escudier, M. P.: Theory and observations of waves on hollow-core vortices, *J. Fluid Mech.*, 99 (3) (1980) 495-511.
- [23] Keller, J. J., Egli, W. & Exley, J.: Force- and loss-free transitions between flow states, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 36 (1985) 854-889.
- [24] Keller, J. J., Egli, W. & Althaus, R.: Vortex breakdown as a fundamental element of vortex dynamics, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 39 (1988) 404-440.
- [25] Kuigin & Okulov, *Phys. Fluids*, v. 10, n. 3, pp. 607-614, 1998.



- [26] Kurosaka, M.: Acoustic streaming in swirling flow and the Ranque-Hilsch /vortex-tube/ effect, *J. Fluid Mech.*, 124(1982) 139-172.
- [27] Le Dize's, S. & Fabre, D. : Large-Reynolds-number asymptotic analysis of viscous centre modes in vortices, *J. Fluid Mech.* 585(2007)153-180.
- [28] Leibovich, S.: The structure of vortex breakdown, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 10 (1978) 221-246.
- [29] Lessen, M., Deshpande, N. V. & Ohanes, B. H.: Stability of a potential vortex with a non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet core, *J. Fluid Mech.*, 60 (3) (1973) 459-466.
- [30] Lessen, M., Singh, P. J. & Paillet, F.: The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory, *J. Fluid Mech.*, 63 (1974) 753-763.
- [31] Litvinov, I. V., Shtork, S. I., Kuibin, P. A., Alekseenko, S. V. & Hanjalic, K.: Experimental study and analytical reconstruction of precessing vortex in a tangential swirler, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 42 (2013) 251-264.
- [32] Loiseleux, T., Chomaz, J. M. & Huerre, P.: The effect of swirl on jets and wakes: Linear instability of the Rankine vortex with axial flow, *Phys. Fluids*, 10 (1998) 1120-1134.
- [33] Lucca-Negro, O. & O' Doherty, T.: Vortex breakdown: a review, *Progress in Energy and Combustion Science*, 27 (2001) 431-481.
- [34] Luchini, P. & Bottaro, A.: Adjoint equations in stability analysis, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 46 (2014) 493-517.
- [35] Mayer, E. W. & Powell, K. G.: Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex, *J. Fluid Mech.*, 245 (1992) 91-114.
- [36] Michelson, I.: Theory of vortex whistle, the *Journal of Acoustical Society of America*, 27(5) (1955) 930-931.
- [37] Stewartson, K. & Brown, S. N.: Near-neutral centre-modes as inviscid perturbations to a trailing line vortex, *J. Fluid Mech.*, 156 (1985) 387-399.
- [38] Olendraru, C., Sellier, A., Rossi, M. & Huerre, P.: Inviscid instability of the Batchelor vortex: Absolute-convective transition and spatial branches, *Phys. Fluids*, 11 (1999) 1805-1820.
- [39] Parras, L. & Feria, R. F.: Spatial stability and the onset of absolute instability of Batchelor's vortex for high swirl numbers, *J. Fluid Mech.*, 583 (2007) 27-43.

- [40] Qadri, U. A. , Mistry, D.& Juniper, M. P.: Structural sensitivity of spairal vortex breakdown, J. Fluid Mech., 720 (2013) 558-581.
- [41] Ruith, M. R., Chen, P., Meiburg, E. & Maxworthy, T.: Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes: direct numerical simulation, J. Fluid Mech., 486 (2003) 331-378.
- [42] Syred, N.: A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems, Progress in Energy and Combusion Science, 32 (2006) 93-161.
- [43] Theofilis, V.: Global linear instability, Annu. Rev. Fluid Mech., 43 (2011) 319-352.
- [44] Wang, S. & Rusak, Z.: The dynamics of a swirling flow in a pipe and transition to axisymmetric vortex breakdown, J. Fluid Mech., 340 (1997) 177-223.
- [45] 大成博文:マイクロバブル発生装置の開発と技術的確立, ながれ 25(2006)191-195.
- [46] 山田, 坂入, 金子, 京藤, 空気吸込み渦の崩壊に伴う微細気泡の生成, 日本流体力学会年会, AM05-24-002, 2005.
- [47] 京藤, 塩田, コアンダ効果により誘起される渦崩壊と渦笛, 日本流体力学会年会, AM14-001, 2014.
- [48] 京藤, 固体境界を有する渦崩壊流れの大域的安定性について, 非線形波動現象の数理とその応用, RIMA 共同研究報告集 (2017)1-15.
- [49] 京藤, 非粘性渦崩壊流れの線形安定性, 日本流体力学会年会, AM16-001, 2016.